Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de informática

Lógica

Unificación y Resolución con UMG

Curso académico 2013-2014

Pepa Hernández

Punto de partida

- EL objetivo es aplicar la regla de resolución para analizar la satisfacibilidad de fórmulas de primer orden en forma clausular.

- Ya vimos que para aplicar la regla de resolución es fundamental disponer de un literal en una cláusula que sea "complementario" con otro literal de otra cláusula.

- Con cláusulas proposicionales esto era muy sencillo, pero con cláusulas con variables la solución es más complicada.

Sustituciones

- Una *sustitución* es una función finita de un conjunto de variables de un lenguaje en el de términos. Se representa como α = {x1/t1, x2/t2, …, xn/tn} donde x1, …, xn son variables diferentes y t1, …, tn son términos.
- Un par xi/ti se denomina *ligadura*
- Una sustitución que no sustituye ninguna variable se llama *sustitución vacía* (λ)
- Una sustitución que sustituye variables por otras variables se denomina *renombrado*

  Ejemplos: Ctes = {a, b, c, d}, Var = {x, y, z, w}, Func = {f/1, h/2}

  - α1 = {x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a}
  - α2 = {x/a, y/a, z/h(b,c), w/f(d)}
  - α3 = {x/y, z/w} (renombrado)
  - λ = {x/x, y/y, z/z}

Sustituciones

- Dada una sustitución $\alpha = \{x1/t1, \ldots, xn/tn\}$, se denomina aplicación de α a una fórmula F (o a un término t) a la fórmula obtenida reemplazando *simultáneamente* cada ocurrencia en F (o en t) de xi por ti, para cada $xi/ti \in \alpha$.
  - $\alpha = \{x/f(a), y/x, z/h(b,y), w/a\}$
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), f(a), h(b,f(a)))$ *incorrecto*
  - $P(x, y, z)\,\alpha = P(f(a), x, h(b,y))$ *correcto*

- Una fórmula F' es instancia de otra F si existe una sustitución no vacía α tal que $F' = F\alpha$

Composición de sustituciones

- Dadas dos sustituciones α = {x1/t1, …, xn/tn} y β= {y1/s1, …, ym/sm} su *composición $\alpha\beta$* se define eliminando del conjunto

$$\{x1/t1\beta, \ldots, xn/tn\beta, y1/s1, \ldots, ym/sm\}$$

  - las ligaduras xi/tiβ tales que xi $\equiv$ tiβ,
  - y las ligaduras yi/si tales que yi $\in$ {x1,…,xn}

- Ejemplo: α = {x/3,y/f(x,1)} y β= {x/4}
  - $\alpha\beta$ = {x/3, y/f(4,1)}
  - $\beta\alpha$ = {x/4, y/f(x,1)}

- Propiedades de la composición:
  - $(F\alpha)\beta = F(\alpha\beta)$
  - $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
  - $\alpha\,\lambda = \lambda\,\alpha = \alpha$
  - $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

Unificadores

- Una sustitución α es un *unificador* de dos fórmulas A y B si $A\alpha = B\alpha$. En este caso se dice que A y B son unificables
- Un unificador α de A y B se denomina *unificador de máxima generalidad (umg)* sii para cualquier otro unificador β de A y B existe alguna sustitución γ tal que $\beta = \alpha\gamma$
- Si dos fórmulas son unificables entonces tienen umg
- El umg de dos fórmulas es único (salvo renombrado)
- Ejemplo:
  - $A \equiv P(x, f(x, g(y)), z)$ y $B \equiv P(r, f(r, u), a)$
  - $\alpha 1 = \{x/r, u/g(y), z/a\}$ y $\alpha 2 = \{x/a, r/a, y/b, u/g(b), z/a\}$
  - $A\alpha 1 = B\alpha 1 = P(r, f(r, g(y)), a)$
  - $A\alpha 2 = B\alpha 2 = P(a, f(a, g(b)), a)$
  - $\alpha 1$ y $\alpha 2$ son unificadores de A y B, pero $\alpha 1$ es el umg de A y B
  - $\gamma = \{r/a, y/b\}$, $\alpha 2 = \alpha 1\, \gamma$

Algoritmo de Unificación

Sean A y B dos átomos con el mismo símbolo de predicado:

(1) $\alpha = \lambda$

(2) Mientras $A\alpha \neq B\alpha$:

(2.1) Encontrar el símbolo más a la izquierda en $A\alpha$ tal que el símbolo correspondiente en $B\alpha$ sea diferente

(2.2) Sean t_A y t_B los términos de $A\alpha$ y $B\alpha$ que empiezan con esos símbolos:

(a) Si ni t_A ni t_B son variables o, si uno de ellos es una variable que aparece en el otro ➔ terminar con fallo (A y B no son unificables)

(b) En otro caso, sea t_A una variable ➔ el nuevo α es el resultado de $\alpha\{t_A/t_B\}$

(3) Terminar, siendo α el umg de A y B

Algoritmo de Unificación

- Ejemplo: $A \equiv P(x, x)$ y $B \equiv P(f(a), f(b))$

α	$A\alpha$	$B\alpha$	(t_A, t_B)
λ	$P(x, x)$	$P(f(a), f(b))$	$(x,f(a))$
$\{x/f(a)\}$	$P(f(a), f(a))$	$P(f(a), f(b))$	(a,b)

Fallo ➔ A y B no son unificables

- Ejemplo: $A \equiv P(x, f(y))$ y $B \equiv P(z, x)$

α	$A\alpha$	$B\alpha$	(t_A, t_B)
λ	$P(x, f(y))$	$P(z, x)$	(x,z)
$\{x/z\}$	$P(z, f(y))$	$P(z, z)$	$(f(y),z)$
$\{x/f(y), z/f(y)\}$	$P(f(y), f(y))$	$P(f(y), f(y))$	

➔ A y B son unificables y su umg es $\{x/f(y), z/f(y)\}$

Resolución con variables

- **Regla de resolución con umg**: Sean $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C_1$ y $\neg L_1' \vee \ldots \vee \neg L_m' \vee C_2$ dos cláusulas, donde todos los L_{ij} son literales con el mismo símbolo de predicado. Puede deducirse una nueva cláusula $(C_1 \rho_1 \vee C_2 \rho_2)\beta$, llamada *resolvente*, donde
  - ρ_1 y ρ_2 son renombrados de todas las variables de cada cláusula que garantizan la no repetición de nombres entre ellas
  - β es umg de $\{L_1 \rho_1, \ldots, L_n \rho_1, L_1'\rho_2, \ldots, L_m'\rho_2\}$

- La regla de resolución con umg se apoya en una versión de la regla de factorización para LPO: Dada una cláusula $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C$, siendo $L_1, \ldots, L_n$ literales con el mismo símbolo de predicado, puede deducirse una nueva cláusula $L \vee C\beta$ donde
  - β es unificador de $L_1, \ldots, L_n$
  - $L = L_1\beta = \ldots = L_n\beta$

  El literal L se denomina *factor* de $L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee C$

El Método de Resolución con UMG

- El método se basa en la aplicación sucesiva de la regla de resolución con umg, definiendo lo que se conoce también como procedimiento de saturación.

- Procedimiento de saturación: Sea *C* un conjunto de cláusulas

  1) Sea $S_0 = C$ y $n = 0$
  2) Si $\square \in S_n \rightarrow$ *C* es insatisfacible
  3) Construir $S_{n+1} = \{$resolventes de $C1$ y $C2$ / $C1 \in (S_0 \cup \ldots \cup S_n)$, $C2 \in S_n\}$
  4) Si $S_{n+1} = \emptyset$ o $S_{n+1} \subset S_0 \cup \ldots \cup S_n \rightarrow$ *C* es satisfacible
  5) Hacer $n = n+1$ y repetir desde 2)

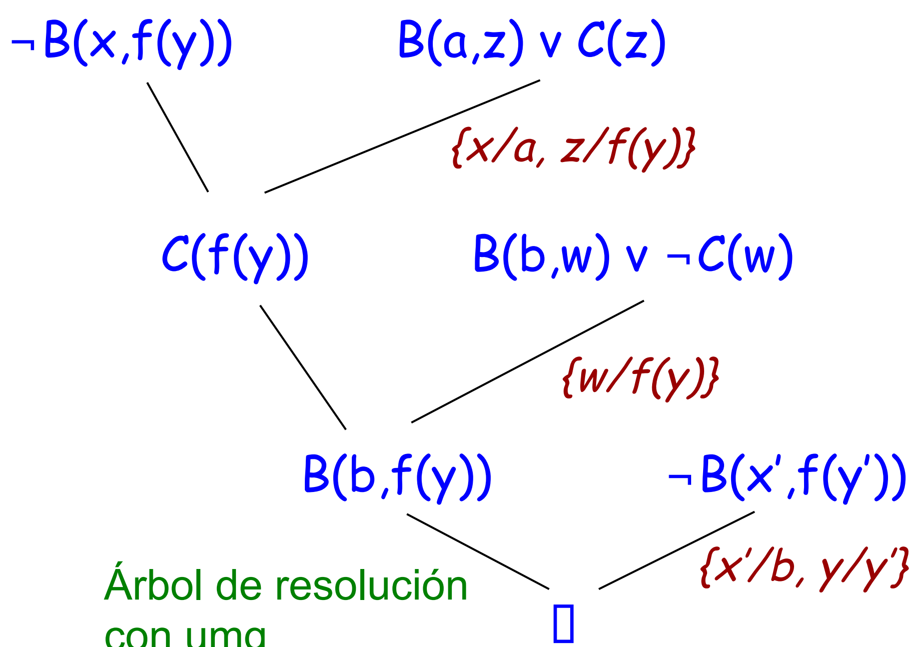
- El paso 3) requiere considerar todos los posibles factores F, de predicados distintos, de las cláusulas *C1* y *C2* sobre los que se pueden resolver ambas cláusulas con el umg que da F

- Este procedimiento genera *todos* y *sólo* los resolventes posibles a partir de un conjunto de cláusulas

Resolución con variables

- Pueden construirse árboles de resolución en los que los resolventes de cada dos cláusulas se obtienen en un paso de resolución con umg
- Por cada paso de resolución en instancias básicas puede definirse un paso de resolución con umg

Ejemplo: C_1: ¬B(x,f(y)) C_2: B(a,z) v C(z) C_3: B(b,w) v ¬C(w)



Árbol de resolución con umg

Resolución con variables

- El método basado en la regla de resolución con umg es correcto
  - Si por su aplicación deducimos □ , entonces el conjunto inicial de cláusulas es insatisfacible *(demostración en el anexo al final del tema).*
- El método basado en la regla de resolución con umg es completo
  - Si el conjunto inicial es insatisfacible, entonces podemos asegurar que con la aplicación sucesiva de la regla de resolución llegaremos a deducir la cláusula vacía *(demostración en el anexo al final del tema).*
- Un conjunto de cláusulas es insatisfacible sii se puede deducir □ a partir de él por resolución con umg

(demostración en el anexo al final del tema).

Anexo: Corrección de la resolución con umg

- Corrección de la regla de resolución con umg: La estructura deductiva $[\forall x_1 \dots x_p (L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C_1), \forall y_1 \dots y_q(\neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee C_2)] \vdash \forall z_1 \dots z_r(C_1\rho_1 \vee C_2\rho_2)\beta$ es correcta
  - siendo $x_1 \dots x_p$, $y_1 \dots y_q$ y $z_1 \dots z_r$ todas las variables de las respectivas cláusulas
  - ρ_1 y ρ_2 renombrados de $x_1 \dots x_p$ y $y_1 \dots y_q$ respectivamente y
  - β es umg de $\{L_1 \rho_1, \dots, L_n \rho_1, L_1' \rho_2, \dots, L_m \rho_2\}$

Demostración:

1. $\forall x_1 \dots x_p(L_1 \vee \dots \vee L_n \vee C_1)$ — Hipótesis
2. $\forall y_1 \dots y_q(\neg L_1' \vee \dots \vee \neg L_m' \vee C_2)$ — Hipótesis
3. $F \vee ..n.. \vee F \vee E_1$ — Sustitución u_i/t_i tal que $L_i = L_j$ y renombrado de variables
4. $\neg F \vee ..m.. \vee \neg F \vee E_2$ — Sustitución v_i/t_i tal que $L_i' = L_j'$ y renombrado de variables
5. $F \vee E_1$ — Intercambio $F \vee F$ por F (Idempotencia) (n-1 veces)
6. $\neg F \vee E_2$ — Intercambio $\neg F \vee \neg F$ por $\neg F$ (Idempotencia) (m-1 veces)
7. $E_1 \vee E_2$ — Corte
8. $\forall z_1 \dots z_r(C_1 \vee C_2)$ — Generalización

Anexo: Completud de la resolución con umg I

- Lema de elevación: Si B es resolvente de B_1 y B_2, ambas instancias básicas de C_1 y C_2, respectivamente, entonces
  - Existe una cláusula C tal que B es instancia básica suya
  - C resulta de un paso de resolución entre *copias* de C_1 y C_2 sobre un literal L, factor común a ambas: $C_1 = L_1 \vee ... \vee L_n \vee D_1$, $C_2 = \neg L_1' \vee ... \vee \neg L_m' \vee D_2$, $C = (D_1\rho_1 \vee D_2\rho_2)\theta$, tal que ρ_1 y ρ_2 son renombrados y θ es un umg: $\{L_1\rho_1...L_n\rho_1\}\theta = \{L_1'\rho_2...L_m'\rho_2\}\theta = L$
- Demostración:
  1. Existen $B_1 = F \vee ... \vee F \vee E_1$ y $B_2 = \neg F \vee ... \vee \neg F \vee E_2$ tal que $B = E_1 \vee E_2$
  2. Existen σ_1, σ_2, Rango(σ_1)=Rango(σ_2)=$\varnothing$ (e.d. sin variables) tal que: $C_1\sigma_1 = B_1$ y $C_2\sigma_2 = B_2$
  3. Existen σ_1' y ρ_1, tal que $C_1\rho_1\sigma_1' = C_1\sigma_1$ y ρ_1 es un renombrado de todas las variables de C_1
  4. Existen σ_2' y ρ_2, tal que $C_2\rho_2\sigma_2' = C_2\sigma_2$ y ρ_2 es un renombrado de todas las variables de C_2 sin variables compartidas con ρ_1 (e.d. Rango(ρ_2) $\cap$ Rango(ρ_1)=$\varnothing$)
  5. $C_1\rho_1\sigma_1' = C_1\rho_1(\sigma_1'\sigma_2')$, pues $C_1\rho_1(\sigma_1'\sigma_2') = C_1(\rho_1\sigma_1')\sigma_2'$ (asociatividad) = $C_1\rho_1\sigma_1'$, dado que Rango(σ_1')=$\varnothing$ (las ligaduras de σ_2' son irrelevantes)
  6. $C_2\rho_2\sigma_2' = C_2\rho_2(\sigma_1'\sigma_2')$, pues $C_2\rho_2(\sigma_1'\sigma_2') = C_2(\rho_2\sigma_1')\sigma_2' = (C_2\rho_2\sigma_1')\sigma_2'$ y $C_2\rho_2\sigma_1' = C_2\rho_2$, pues Rango($\rho_2$) $\cap$ Rango(ρ_1)=$\varnothing$ y Dominio(σ_1')=Rango(ρ_1) (las ligaduras de σ_1' son irrelevantes)
  7. Sea $\sigma = \sigma_1'\sigma_2'$, σ es una sustitución básica pues σ_1 y σ_2 lo son

Anexo: Completud de la resolución con umg II

- Demostración del lema de elevación (continuación):
  8. $B_1=C_1\rho_1\sigma=(L_1 \vee \ldots \vee L_n \vee D_1)\rho_1\sigma=L_1\rho_1\sigma \vee \ldots \vee L_n\rho_1\sigma \vee D_1\rho_1\sigma=F \vee \ldots \vee F \vee E_1$ y $B_2=C_2\rho_2\sigma=(\neg L_1' \vee \ldots \vee \neg L_m' \vee D_2)\rho_2\sigma= \neg L_1'\rho_2\sigma \vee \ldots \vee \neg L_m'\rho_2\sigma \vee D_2\rho_2\sigma= \neg F \vee \ldots \vee \neg F \vee E_2$
  9. $\{L_1\rho_1,\ldots,L_n\rho_1\}\sigma = F$ y $\{\neg L_1'\rho_2,\ldots,\neg L_m'\rho_2\}\sigma = \neg F$, luego $\{L_1\rho_1,\ldots,L_n\rho_1,L_1'\rho_2,\ldots,L_m'\rho_2\}\sigma=F$
  10. Si $\{L_1\rho_1,\ldots,L_n\rho_1,L_1'\rho_2,\ldots,L_m'\rho_2\}$ es unificable, existe un umg θ para este conjunto
  11. Sea $L = \{L_1\rho_1,\ldots,L_n\rho_1,L_1'\rho_2,\ldots,L_m'\rho_2\}\theta$, luego L es factor de $C_1\rho_1$ y $C_2\rho_2$
  12. Si θ es umg y σ un unificador cualquiera, existe ω tal que $\theta \circ \omega = \sigma$
  13. $B = E_1 \vee E_2 = D_1\rho_1\sigma \vee D_2\rho_2\sigma = (D_1\rho_1 \vee D_2\rho_2)\sigma = (D_1\rho_1 \vee D_2\rho_2)\theta\omega$
  14. Sea $C = (D_1\rho_1 \vee D_2\rho_2)\theta$, entonces $B = C\omega$ y $C\omega$ es instancia básica de C pues $\theta \circ \omega = \sigma$ y σ es una sustitución básica.

Anexo: Completud de la resolución con umg III

- Lema: Si un conjunto C de cláusulas es insatisfacible, se deduce de él □ por resolución con umg
  1. Si C es insatisfacible, entonces de un conjunto de instancias básicas suyo se deduce □ por resolución
  2. Existe un árbol de resolución de □ con profundidad n
  3. Si n=1 la resolución entre instancias básicas permite definir un paso de resolución con umg entre cláusulas de C (Lema de elevación)
  4. Si n>1, existe un conjunto de resolventes R de cláusulas de C, tal que $C \cup R$ tiene un árbol de resolución de □ con profundidad n-1:
     - Para cada paso de resolución de nivel 1, sean B_1 y B_2 instancias básicas de cláusulas C_1 y C_2 de C las que se resuelven dando B
     - Existe un paso de resolución con umg entre C_1 y C_2 con resolvente RC tal que B es instancia básica de RC (Lema de elevación). Sea R el conjunto de dichas cláusulas RC.
     - Si se eliminan todos los pasos de resolución que dan instancias B, los nuevos nodos de nivel 0 serán instancias básicas de R o de C.
     - El conjunto $C \cup R$ tiene un árbol de resolución de □ con profundidad n-1
  5. Para el nuevo conjunto $C' = C \cup R$, si n-1=1 se deduce □ por resolución con umg (por 3). Si n-1>1, existe un conjunto de resolventes R' de cláusulas de C', tal que $C' \cup R'$ tiene un árbol de resolución de □ con profundidad n-2

     Y así sucesivamente. Por tanto:
  6. Del conjunto C se puede deducir □ por resolución con umg

Anexo: Completud de la resolución con umg IV

- Teorema: Un conjunto de cláusulas es insatisfacible sii se deduce de él □ por resolución con umg

⇒ Si el conjunto de cláusulas es insatisfacible entonces se deduce de él □ por resolución con umg (lema anterior)

⇐ 1. C |— □ aplicando la regla de resolución con umg

2. La regla de resolución con umg es una regla correcta de deducción, luego si C |— □ entonces C |= □ (teorema de validez)

3. □ es falsa en cualquier interpretación

4. C no puede ser verdadero en ninguna interpretación

5. C es insatisfacible